SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE TELEBACHILLERATO

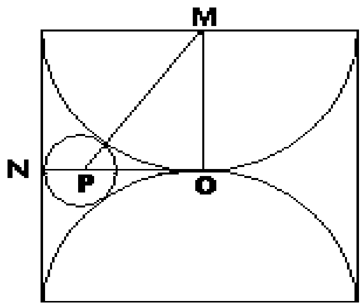
11ª Olimpiada de Matemáticas para estudiantes de Telebachillerato
Fase Zonal 2015

Hoja de respuestas

1. Si Fernando y Gerardo tomaran cada uno 5 talleres, podría pasar que no estén juntos en ningún taller; esto puede suceder si Fernando toma 5 talleres distintos a los de Gerardo, cubriendo así 10 de los 11 talleres posibles. En el caso de que cada uno tome 6 talleres, forzosamente deben compartir un taller porque de lo contrario debería haber al menos 6 + 6 = 12 talleres distintos (6 talleres que lleva Fernando y 6 talleres que lleva Gerardo), pero sólo hay 11 talleres. Por lo tanto si cada uno toma 6 talleres compartirán al menos uno.

2. Como Bruno tiene $4, necesariamente tiene que tener las monedas de $1 y de $3 (pues no puede tener dos monedas de $2). César tiene $7, por lo que puede tener las parejas $1 y $6, $2 y $5 o $3 y $4, pero como Bruno tiene las monedas $1 y de $3, necesariamente tiene que tener las monedas $2 y $5.
Quedan disponibles las monedas de $4, $6, $7, $8, $9 y $10. La menor suma que con ellas podemos hacer es $10, y la única posibilidad de sumar $11 es usando las monedas de $4 y $7, que las tiene que tener Daniel. Nos quedan las monedas de $6, $8, $9 y $10. La única manera de sumar 16 es con las monedas de $6 y $10, por lo que esas las tiene Ana y Ernesto debe tener las de $8 y $9. De manera que la respuesta es Ana.

3. Sea O el centro del cuadrado y sea P el centro del círculo más pequeño. Tenemos que OP es una tangente común a ambos semicírculos, y pasa por el punto medio N de un lado del cuadrado. Sea M el centro de uno de los dos semicírculos.

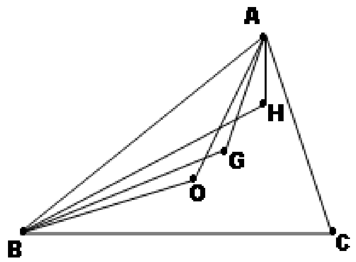


Entonces, M es punto medio de un lado del cuadrado. Luego, $ON = OM = 40$ cm. Si r es el radio del círculo más pequeño, tenemos que $MP = 40 + r$ y $OP = 40 - r$. Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo MPO, obtenemos

$$1600 \text{ cm}^2 = OM^2 = MP^2 = (MP - OP)(MP + OP) = (2r)(80)cm^2,$$

de donde $r = 10$ cm.

4. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC, respectivamente. Como también se tiene que $\angle AOB = 2\angle ACB$ se tiene que $\angle AGB = \angle AOB$ y G está en el circuncírculo del triángulo AOB.



Por otro lado, como O, G y H están en ese orden sobre la recta de Euler[1], se tiene que H queda fuera o sobre el circuncírculo del triángulo AOB, de donde $\angle AHB \leq \angle AOB$. Es fácil demostrar que $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$. Luego, $180^\circ - \angle ACB \leq 2\angle ACB$, de donde $\angle ACB \geq 60^\circ$.

5. Observemos que si $abcd$ es un número defectuoso, entonces $a \neq 0$, $c \geq 1$, $d \geq 1$ y $b \neq 0$. Además

$$c \times d = 10a + b = ab$$
$$(c-1) \times (d-1) = 10b + a = ba$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 10b + a &= cd - d - c + 1 \\ &= 10a + b - d - c + 1 \\ 9(a-b) &= c + d - 1 \end{aligned}$$

Luego, $1 \leq 9(a-b) \leq 17$, de donde $9(a-b) = 9$, esto es, $a = b + 1$. Entonces $c + d = 10$. Sustituyendo tenemos que $c(10-c) = 10(b+1) + b$, es decir, $c^2 - 10c + (11b + 10) = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en la variable c obtenemos que $c = 5 \pm \sqrt{15 - 11b}$, de donde $15 - 11b \geq 0$, es decir, $b \leq \dfrac{15}{11} < 2$. Luego, $b = 0$ o 1. Si $b = 0$, c no es entero. De aquí que

[1] En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.

$b=1,\ a=2$ y $c=7$ o $c=3,$ lo que implica que $d=3$ o $d=7,$ respectivamente. Por lo tanto, los únicos números defectuosos son 2137 y 2173.

6. El sistema es equivalente al sistema

$$z=x^2y+xyz,\quad x=y^2z+xyz,\quad y=z^2x+xyz.$$

Luego,

$$z-x^2y=x-y^2z=y-z^2x.$$

Si $x=y,$ entonces $y^2z=z^2x$ y por lo tanto $x^2z=z^2x.$ De aquí, $xz(x-z)=0$ y como x, z son positivos, obtenemos que $x=z.$ Por lo tanto, $x=y=z.$ De manera análoga, $x=z$ o $y=z$ implica que $x=z=y.$ Luego, si cualesquiera dos de x, y, z son iguales, entonces todos son iguales. Supongamos que no hay dos de x, y, z iguales. Podemos suponer que x es el mayor de los tres de manera que $x>y$ y $x>z.$ Tenemos dos posibilidades: $y>z$ o $z>y.$

Supongamos que $x>y>z.$ De las relaciones $z-x^2y=x-y^2z=y-z^2x$ obtenemos que

$$y^2z>z^2x>x^2y.$$

De aquí, $y^2z>z^2x$ y $z^2x>x^2y$ implican que $y^2>zx$ y $z^2>xy.$ Así,

$$\left(y^2\right)\left(z^2\right)>(zx)(xy).$$

Luego, $yz>x^2.$ Esto es una contradicción pues $z<y<x\Rightarrow yz<y^2<x^2.$ De manera análoga obtenemos una contradicción si $x>z>y.$ La única posibilidad es entonces $x=y=z$ y en este caso obtenemos la ecuación $x^2=\frac{1}{2}.$ Como $x>0,$ obtenemos $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{2}}.$